

Recasages possibles : 205, 208, 213

Référence : Analyse fonctionnelle (exercices corrigés), LACOMBE, MASSAT (p. 114, 122-124)

Développement

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E . On définit l'ensemble des opérateurs de *Hilbert-Schmidt*

$$\mathcal{HS}(E) := \left\{ T \in \mathcal{L}_c(E) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty \right\}.$$

Lemme 1 Soient $T \in \mathcal{L}_c(E)$ et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne de E . Alors, $T \in \mathcal{HS}(E) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{HS}(E)$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^*e_n\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \|Tf_m\|^2.$$

Théorème 2 L'application $T \mapsto \|T\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur l'espace $\mathcal{HS}(E)$ qui le munit d'une structure d'espace de Hilbert. De plus, l'inclusion $(\mathcal{HS}(E), \|\cdot\|_2) \hookrightarrow (\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à la norme de E , est continue.

Proposition 3 L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{HS}(E)$.

- *Preuve du Lemme 1* : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après l'égalité de Parseval et par définition de l'adjoint

$$\|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} |\langle e_n, T^*f_m \rangle|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} |\langle T^*f_m, e_n \rangle|^2.$$

Ainsi, par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T^*f_m, e_n \rangle|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \|T^*f_m\|^2.$$

Comme les bases hilbertiennes considérées sont arbitraires, on obtient bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^*e_n\|^2$, ce qui justifie que $T \in \mathcal{HS}(E) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{HS}(E)$, et puisque $(T^*)^* = T$, on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \|Tf_m\|^2$, ce qui montre que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ ne dépend pas de la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2* : Montrons tout d'abord que $\mathcal{HS}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E)$. L'application nulle vérifie clairement la condition d'appartenance à $\mathcal{HS}(E)$, donc $\mathcal{HS}(E) \neq \emptyset$. Soient $T, S \in \mathcal{HS}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a par inégalité triangulaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|(T + \lambda S)e_n\|^2 = \|Te_n + \lambda Se_n\|^2 \leq (\|Te_n\| + \|\lambda Se_n\|)^2.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(T + \lambda S)e_n\|^2 \leq \|Te_n\|^2 + |\lambda|^2 \|Se_n\|^2 + 2|\lambda| \|Te_n\| \|Se_n\| \leq 2\|Te_n\|^2 + 2|\lambda|^2 \|Se_n\|^2.$$

Or, $T, S \in \mathcal{HS}(E)$ donc la série de terme général le membre de droite converge, et par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|(T + \lambda S)e_n\|^2$ converge, donc $T + \lambda S \in \mathcal{HS}(E)$. Ainsi, $\mathcal{HS}(E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E)$. Remarquons que c'est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{L}_c(E)$ car par exemple $\text{id}_E \in \mathcal{L}_c(E) \setminus \mathcal{HS}(E)$. En effet,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\text{id}_E(e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Introduisons alors l'application suivante :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{HS}} : \begin{cases} \mathcal{HS}(E) \times \mathcal{HS}(E) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (T, S) & \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle Te_n, Se_n \rangle. \end{cases}$$

Cette application est bien définie car si $T, S \in \mathcal{HS}(E)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle Te_n, Se_n \rangle| \leq \|Te_n\| \|Se_n\| \leq \frac{\|Te_n\|^2 + \|Se_n\|^2}{2}.$$

À nouveau par comparaison des séries à termes positifs, on voit que la série définissant $\langle T, S \rangle_{\mathcal{HS}}$ est absolument convergente, donc convergente. De plus, on voit clairement que si $T \in \mathcal{HS}(E)$, alors $\|T\|_2^2 = \langle T, T \rangle_{\mathcal{HS}}$. Par sesquilinearité du produit scalaire de E et par linéarité de la somme, on voit que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{HS}}$ est sesquilinéaire ; puis par continuité de la conjugaison complexe, et par le caractère hermitien de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{HS}}$ est hermitienne. Enfin, $\|T\|_2^2 \geq 0$ pour tout $T \in \mathcal{HS}(E)$, et si $\|T\|_2^2 = 0$, alors on a $\|Te_n\|^2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $T = 0$ puisque $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E et que T est continue. Par conséquent, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{HS}}$ est bien un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{HS}(E)$, qui est donc préhilbertien.

Montrons désormais que $\|T\| \leq \|T\|_2$, ce qui revient à montrer que l'inclusion canonique de $(\mathcal{HS}(E), \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ est continue. Pour $x \in H$ et $T \in \mathcal{HS}(E)$. On a

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle Tx, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, T^*e_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|^2 \|T^*e_n\|^2 \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|x\|^2 \|T^*\|_2^2 \\ &\leq \|x\|^2 \|T\|_2^2 \quad \text{par le Lemme 1.} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\|T\| \leq \|T\|_2$, et on peut alors montrer que $\mathcal{HS}(E)$ est un Hilbert. Soient $(T_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{HS}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geq N, \|T_p - T_q\|_2^2 \leq \varepsilon.$$

Comme pour $p, q \geq N$, on a $\|T_p - T_q\| \leq \|T_p - T_q\|_2 \leq \varepsilon$, la suite $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ donc converge vers $T \in \mathcal{L}_c(E)$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_p e_n - T e_n\| \leq \|T_p - T\| \|e_n\| = \|T_p - T\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, la suite $(T_p e_n)_p$ converge vers $T e_n$ dans E . Par ailleurs, pour tout $M \in \mathbb{N}$, et tous $p, q \geq N$, on a

$$\sum_{n=0}^M \|T_p e_n - T_q e_n\|^2 \leq \|T_p - T_q\|^2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient

$$\forall M \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \sum_{n=0}^M \|T_p e_n - T e_n\|^2 \leq \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $M \in \mathbb{N}$, en faisant tendre M vers $+\infty$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} \|T_p e_n - T e_n\|^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre à la fois que $T_p - T \in \mathcal{HS}(E)$, donc que $T \in \mathcal{HS}(E)$, et que $(T_p)_p$ converge au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ vers T . Ainsi, on a bien montré que $\mathcal{HS}(E)$ était un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_2$, ce qui achève la preuve du **Théorème 2**.

- *Preuve du Corollaire 3* : Soient pour $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \text{Vect}(e_0, \dots, e_k)$, et $T \in \mathcal{HS}(E)$. Le sous-espace vectoriel F_k étant fermé dans E (car de dimension finie), on considère P_k le projecteur orthogonal sur F_k . Remarquons tout d'abord que l'opérateur $T \circ P_k$ est de rang fini car d'image $T(F_k)$ qui ne peut être de dimension plus grande que F_k puisque T est linéaire. De plus, on a $T \circ P_k \in \mathcal{HS}(E)$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(P_k e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{n \leq k} \|T e_n\|^2 = \sum_{n=0}^k \|T e_n\|^2 < +\infty.$$

Par ailleurs, on a

$$\|T \circ P_k - T\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T(P_k e_n) - T e_n\|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \|T e_n\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

car $T \in \mathcal{HS}(E)$ donc la série $\sum \|T e_n\|^2$ converge et donc son reste tend vers 0. Ainsi, on a bien $T \circ P_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, donc T est limite d'opérateur de rang fini dans $\mathcal{HS}(E)$. Ceci montre que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{HS}(E)$ et conclut la preuve du **Corollaire 3**.